

复变函数 2023A 参考答案

1. (10分) 解: 令 G 表示在从原点起割去正实轴的裂纹平面. 设 $z = r(z) e^{i\theta(z)}$ 是 $z \in G$ 的指数表示式, 则通过选取 $\theta(z) \in (0, 2\pi)$, 有 $w = \sqrt[5]{z}$ 在 G 内的单值解析分支的表达式为

$$w_k = \sqrt[5]{r(z)} e^{i\frac{\theta(z)+2k\pi}{5}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4. \quad \dots(3\text{分})$$

现确定分支标号 k . $r(-1) = |-1| = 1$, $\theta(-1) = \pi$, 再将 $w(-1) = -1$ 带入上式中即有

$$-1 = \sqrt[5]{r(-1)} e^{i\frac{\theta(-1)+2k\pi}{5}} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}}, \quad \dots(3\text{分})$$

由此 $k = 2$(1分)

最后, $r(-2i) = |-2i| = 2$, $\theta(-2i) = \frac{3}{2}\pi$,

$$w(-2i) = \sqrt[5]{r(-2i)} e^{i\frac{\theta(-2i)+4\pi}{5}} = \sqrt[5]{2} e^{i\frac{11}{10}\pi}. \quad \dots(3\text{分})$$

2. (10分) 证明: 由于常函数总是解析的, 必要性得证. ...(1分)

现证明充分性. (方法一:) 设 f 的实部和虚部分别为 u, v . 则 $\bar{f}$ 的实部和虚部分别为 $u, -v$(1分)

因为 $f(z)$ 和 $\bar{f}(z)$ 均在 D 内解析, 所以函数组 u, v 及 $u, -v$ 在 D 内均满足 C.-R. 方程, ...(1分)

即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \dots(2\text{分})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(-v)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad \dots(2\text{分})$$

因此, 在 D 内有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad \dots(2\text{分})$$

这使得 u 和 v 在 D 内均为常数. 故 $f(z)$ 在 D 内为常数. ...(1分)

(方法二:)

依题意, $f(z) + \bar{f}(z)$ 和 $i(f(z) - \bar{f}(z))$ 在 D 内解析, 且这两个函数在 D 内的值均落在实轴上. ...(3分)

由保域定理可知当 $f(z) + \bar{f}(z)$ (或 $i(f(z) - \bar{f}(z))$) 非常数时, 其值域必为复平面中的区域. ...(2分)

因此, $f(z) + \bar{f}(z)$ 和 $i(f(z) - \bar{f}(z))$ 在 D 内均为常数. ...(2分)

从而 $f(z)$ 在 D 内为常数. ...(2分)

3. (10分) 解: $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+1)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2+1}$(1分)

当 $|t| < 1$ 时,

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad \frac{1}{(1+t)^2} = -\left(\frac{1}{1+t}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) t^n. \quad \dots(2\text{分})$$

当 $1 < |z-i| < 2$ 时, 有 $\left|\frac{i}{z-i}\right| < 1$, $\left|\frac{z-i}{2i}\right| < 1$, 故

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(z-i+i)^2} = \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{i}{z-i}\right)^2} = \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{i}{z-i}\right)^n. \quad \dots(3\text{分})$$

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z-i+2i} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{\frac{z-i}{2i}+1} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z-i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^n. \quad \dots(2\text{分})$$

因此,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{i}{z-i}\right)^n - \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z-i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \frac{(-i)^{n-2}}{(z-i)^n} + \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+2}} (z-i)^n. \end{aligned} \quad \dots(2\text{分})$$

(计算 $\frac{1}{z^2}$ 的洛朗展式, 方法二:) 记 $\frac{1}{z^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-i)^n$. 令 Γ 表示圆周 $|z-i| = \frac{3}{2}$, $g_n(z) = \frac{1}{z^2(z-i)^{n+1}}$, 则由留数定理,

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g_n(\zeta) d\zeta = \operatorname{Res}_{z=0} g_n(z) + \operatorname{Res}_{z=i} g_n(z). \quad \dots(1\text{分})$$

$$\operatorname{Res}_{z=0} g_n(z) = \left[\frac{1}{(z-i)^{n+1}} \right]' \Big|_{z=0} = (n+1)i^n. \quad \dots(1\text{分})$$

当 $n \leq -1$ 时, $\operatorname{Res}_{z=i} g_n(z) = 0$; 当 $n \geq 0$ 时,

$$\operatorname{Res}_{z=i} g_n(z) = \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{z^2} \right]^{(n)} \Big|_{z=i} = -(n+1)i^n. \quad \dots(1\text{分})$$

故当 $n \geq 0$ 时, $c_n = 0$; 当 $n \leq -1$ 时, $c_n = (n+1)i^n$. 从而

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)i^n}{(z-i)^n}. \quad \dots(2\text{分})$$

4. (10分) 解: 易知 $(z-\pi)^2(z+1)^3(e^{1/z}-1)$ 的零点有

$$z = \pi \text{ (二阶零点)}, z = -1 \text{ (三阶零点)}, \text{ 和 } z = \frac{1}{2k\pi i} \text{ (} k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \text{) (一阶零点)},$$

其中 $z = \pi$ 为 $\sin z$ 的一阶零点, ...(3分)

故 $f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)^2(z+1)^3(e^{1/z}-1)}$ 的孤立奇点有

$$z = \pi \text{ (一阶极点)}, z = -1 \text{ (三阶极点)}, \text{ 和 } z = \frac{1}{2k\pi i} \text{ (} k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \text{) (一阶极点)},$$

以及 $z = \infty$. ($z = 0$ 为非孤立奇点) ...(4分)

对于孤立奇点 $z = \infty$, 有 $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k\pi) = 0$, 此外由

$$\left| \frac{e^{-k} - e^k}{2i(ki-\pi)^2(ki+1)^3(e^{-i/k}-1)} \right| \geq \frac{e^k - 1}{12k^5|e^{-i/k}-1|} \quad (k > \pi),$$

可知

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(ki) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{e^{-k} - e^k}{2i(ki-\pi)^2(ki+1)^3(e^{-i/k}-1)} = \infty.$$

故 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ 不存在且不无穷, 因此 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的本质奇点. ...(3分)

5. (20分) 解: (1) 易知 $f(z) = \frac{z^2}{z^3-1}$ 的奇点有 $z = z_k = e^{2k\pi i/3}$ (一阶极点), $k = 0, 1, 2$(2分)

于是由留数定理, (方法一:)

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z^3-1} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) \right) = 2\pi i \left(\frac{z^2}{3z^2} \Big|_{z=z_0} + \frac{z^2}{3z^2} \Big|_{z=z_1} + \frac{z^2}{3z^2} \Big|_{z=z_2} \right) = 2\pi i.$$

...(8分)

(方法二:)

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z^3-1} dz = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 2\pi i \operatorname{Res}_{t=0} f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{t=0} \frac{1}{(1-t^3)t} = 2\pi i \cdot \frac{1}{1-t^3} \Big|_{t=0} = 2\pi i.$$

...(8分)

(注: 也可用复周线上的柯西积分公式计算.)

(2) 易知 $f(z) = \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}$ 的奇点有 $z = -1 \pm 2i$ (一阶极点),

...(2分)

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{i\pi x}}{x^2+2x+5} dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1+2i} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{ze^{i\pi z}}{z+1+2i} \Big|_{z=-1+2i} = 2\pi i \cdot \frac{-1+2i}{4i} e^{-i\pi-2\pi} = \frac{1-2i}{2} \pi e^{-2\pi}.$$

...(6分)

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2+2x+5} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{i\pi x}}{x^2+2x+5} dx = -\pi e^{-2\pi}.$$

...(2分)

6. (10分) 解: 方程 $3z^4 = \cos z$ 在 $|z| < 1$ 内有 4 个根.

...(2分)

现证明此结论. 设 $f(z) = 3z^4$, $g(z) = -\cos z$. 则 $f(z), g(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 上解析.

...(1分)

在 $|z| = 1$ 上, $|f(z)| = |3z^4| = 3$.

...(1分)

此外, 令 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$). 则

$$|g(z)| = |\cos z| = \left| \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right| \leq \frac{|e^{iz}| + |e^{-iz}|}{2} = \frac{e^{-\sin \theta} + e^{\sin \theta}}{2} \leq \frac{e + e}{2} < 3.$$

...(2分)

这说明在 $|z| = 1$ 上 $|g(z)| < 3 = |f(z)|$.

...(2分)

由鲁歇定理, $3z^4 - \cos z$ 与 $3z^4$ 在 $|z| < 1$ 内有相同的零点个数. 故结论得证.

...(2分)

7. (10分) 证明: (方法一:) 由潘勒韦连续延拓原理, $\{D^*, 0\}$ 是 $\{D, F(z)\}$ 透过弧 Γ 的直接解析延拓, 其中 $D^* = \{z: \operatorname{Im} z > 0\} - \overline{D}$. 记 $G(z)$ 为 $G|_D = F = f$, $G|_{\Gamma \cup D^*} = 0$, 则 $G(z)$ 在 $D \cup \Gamma \cup D^*$ (即上半平面) 内解析. (或应用对称原理的一般形式, 透过圆弧 Γ 解析延拓 F , 可得 $D \cup \Gamma \cup D^*$ 上的解析函数 $G(z)$, 满足 $G|_D = F = f$, $G|_{\Gamma} = 0$.)

...(5分)

由解析函数零点的孤立性(或唯一性定理), $G|_{D \cup \Gamma \cup D^*} \equiv 0$. 从而 $f|_D \equiv 0$.

...(5分)

(方法二:) 作分式线性变换 $\varphi(z) = -i \frac{z-i}{z+i}$. 则 φ 将 Γ 映成实轴上的开区间 $I = (-1, 1)$, 将 I 又映回 Γ , 同时将点 $-1, 0, 1$ 依次映成点 $1, i, -1$. 因此 φ 将 D 映成自身.

...(2分)

考虑 $g(z) = F(\varphi(z))$. 则 g 是 $D \cup I$ 上的连续函数, $g|_D$ 在 D 内解析, 且当 $z \in I$ 时, $g(z) = 0$. 特别地, g 在 I 上取实值.

...(2分)

根据黎曼-施瓦兹对称原理, g 可延拓为 $D \cup I \cup D^*$ (也可写单位圆盘, 下同) 上的解析函数 G , 其中 D^* 是 D 关于实轴的对称象.

...(2分)

注意到 G 在 I 上恒为零, 由唯一性定理, G 在 $D \cup I \cup D^*$ 内恒为零.

...(2分)

从而 $g|_D = G|_D$ 在 D 内恒为零, 即 $f(\varphi(z)) = F(\varphi(z)) = 0$ ($z \in D$). 故由 $\varphi(D) = D$ 可知 $f|_D \equiv 0$.

...(2分)

(方法三:) 设 $\Omega = D \cap \{z: \operatorname{Im} z > \frac{1}{2}\}$. 由唯一性定理, 只需证明 f 在 Ω 内恒为零.

...(1分)

记单位圆盘 $|z| < 1$ 为 K . 由黎曼存在与唯一性定理及边界对应定理, 存在 $\overline{\Omega}$ 与 $\overline{K}$ 之间的同胚映射 φ , 使得 $\varphi(\Omega) = K$, 且 φ^{-1} 在 K 内解析.

...(2分)

令 $G = F \circ \varphi^{-1}$, $\sigma = \varphi(\Gamma \cap \partial\Omega)$. 则 G 在 $\bar{K}$ 上连续, 在 K 内解析, σ 是一段圆弧, 且 $G|_{\sigma} \equiv 0$ (1分)

取正整数 n 使得 σ 的弧长大于 $\frac{2\pi}{n}$. 作

$$h(z) = \prod_{k=0}^{n-1} G(e^{i\frac{2k\pi}{n}} z), \quad z \in \bar{K}. \quad \dots(2分)$$

则 h 在 $\bar{K}$ 上连续, 在 K 内解析, 且 $h|_{\partial K} \equiv 0$. 由最大模原理 (或柯西积分公式), $h|_K \equiv 0$ (2分)

假若 G 在 K 内不恒为零, 由唯一性定理, h 在 K 内至多有有限多个零点, 矛盾. 故 G 在 K 内恒为零. 从而由 $f|_{\Omega} = F|_{\Omega} = G \circ \varphi|_{\Omega}$, f 在 Ω 内恒为零. ... (2分)

8. (10分) 证明: 记 $a = f(0)$. 依题意, $|a| < 1$. 作分式线性变换 $\varphi(w) = \frac{w-a}{1-\bar{a}w}$, 它将单位圆盘映成单位圆盘, 且将点 a 映成 0.

令 $g(z) = \varphi(f(z))$ ($|z| < 1$). 于是, $g(z)$ 在单位圆盘内解析, $|g(z)| < 1$ ($|z| < 1$), 且 $g(0) = 0$ (3分)

由施瓦兹引理, $|g'(0)| \leq 1$ (2分)

根据求导链式法则, 有

$$g'(0) = \varphi'(a) \cdot f'(0) = \frac{f'(0)}{1-|a|^2},$$

从而 $|f'(0)| = |g'(0)| \cdot |1-|a|^2| \leq 1$ (3分)

此外, 当 $|f'(0)| = 1$ 时, 必有 $a = 0$. 此时, 对 $f(z)$ 应用施瓦兹引理, 可知它是一个旋转变换. ... (2分)

9. (10分) 证明: 对 n 使用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时, 有

$$u(z) = a_0 y + a_1 x = \operatorname{Re} [(a_1 - ia_0)(x + iy)] = \operatorname{Re} (cz), \quad z \in \mathbb{C},$$

其中 $c = a_1 - ia_0$, 结论成立. ... (1分)

假设结论对 $n = k$ 时成立, 现令 $n = k + 1$.

由于 u 是复平面内的调和函数, 存在整函数 f 使得 $u = \operatorname{Re} f$ (2分)

根据解析函数的性质即有 $\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{Re} f'$ (1分)

注意到 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 关于 x 和 y 是一个二元 k 次齐次实系数多项式, 由归纳假设可知存在常数 c , 使得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{Re} (cz^k). \quad \dots(1分)$$

故整函数 $f'(z) - cz^k$ 只取 0 或纯虚数值, 由保域定理, $f'(z) - cz^k$ 是常数. 因此, 存在常数 c_1 和 c_2 , 使得

$$f(z) = c_0 z^{k+1} + c_1 z + c_2,$$

其中 $c_0 = \frac{c}{k+1}$ (2分)

又

$$u = \operatorname{Re} f = \operatorname{Re} (c_0 z^{k+1} + c_1 z + c_2) = \operatorname{Re} (c_0 z^{k+1}) + \operatorname{Re} (c_1 z) + \operatorname{Re} c_2$$

是关于 x 和 y 的二元 $k+1$ 次齐次实系数多项式, 可知

$$\operatorname{Re} (c_1 z) + \operatorname{Re} c_2 = \operatorname{Re} c_1 \cdot x - \operatorname{Im} c_1 \cdot y + \operatorname{Re} c_2$$

也应如此. 故 $c_1 = \operatorname{Re} c_2 = 0$ (2分)

从而

$$u(z) = \operatorname{Re} (c_0 z^{k+1} + c_2) = \operatorname{Re} (c_0 z^{k+1}),$$

即 $n = k + 1$ 时结论成立. 证毕. ... (1分)