

复变函数 2024A 参考答案

1. (10分) 记 $z = re^{i\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi)$, 则

$$w = \sqrt[4]{r} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad \dots(3\text{分})$$

由

$$w(-4) = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi + 2k\pi}{4}} = -1 + i = \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}}$$

得 $k = 1$(4分)

故

$$w(i) = e^{i \frac{\pi/2 + 2\pi}{4}} = e^{i \frac{5\pi}{8}}. \quad \dots(3\text{分})$$

2. (10分) 当 $1 < |z| < 2$ 时,

$$f(z) = \frac{z+3}{(z-1)(z-2)} = \frac{5}{z-2} - \frac{4}{z-1} = -\frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{z}{2}} - \frac{4}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \quad \dots(4\text{分})$$

$$= -\frac{5}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{4}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{2^{n+1}} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}. \quad \dots(6\text{分})$$

3. (10分) 方法一: 由 Cauchy-Riemann 方程,

$$u_x = v_y = \frac{y}{x^2 + y^2} + 2y, \quad \dots(2\text{分})$$

$$u_y = -v_x = -\frac{x}{x^2 + y^2} + 2x. \quad \dots(2\text{分})$$

由第一个式子可得

$$u(x, y) = \int \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + 2y \right) dx + C(y) = \int \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} d\left(\frac{x}{y}\right) + 2xy + C(y) = \arctan \frac{x}{y} + 2xy + C(y). \quad \dots(3\text{分})$$

于是

$$u_y = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} + 2x + C'(y) = -\frac{x}{x^2 + y^2} + 2x + C'(y).$$

对比第二个式子可得 $C'(y) = 0$, 故 $C(y) = C$, $C \in \mathbb{R}$ 为任意常数. ...(1分)

故在上半平面, 对 $z = x + iy, y > 0$, 解析函数

$$\begin{aligned} f(z) = u + iv &= \arctan \frac{x}{y} + 2xy + C + i \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x^2 + y^2 \right) \\ &= i \ln z - iz^2 + C \end{aligned} \quad \dots(2\text{分})$$

方法二: 由 Cauchy-Riemann 方程,

$$du(x, y) = u_x dx + u_y dy = v_y dx - v_x dy. \quad \dots(3\text{分})$$

所以

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \int_{(1,1)}^{(x,y)} v_y dx - v_x dy + C = \int_{(1,1)}^{(x,y)} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + 2y \right) dx + \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} + 2x \right) dy + C \\
 &= \int_{(1,1)}^{(1,y)} \left(-\frac{1}{1^2 + y^2} + 2 \right) dy + \int_{(1,y)}^{(x,y)} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + 2y \right) dx + C \\
 &= -\arctan y + 2y + \arctan \frac{x}{y} - \arctan \frac{1}{y} + 2y(x-1) + C \\
 &= \arctan \frac{x}{y} + 2xy + C,
 \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
 &= \int_{(1,1)}^{(x,1)} \left(\frac{1}{x^2 + 1^2} + 2 \right) dx + \int_{(x,1)}^{(x,y)} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} + 2x \right) dy + C \\
 &= \arctan x + 2x - \arctan \frac{y}{x} + \arctan \frac{1}{x} + 2x(y-1) + C \\
 &= -\arctan \frac{y}{x} + 2xy + C, \quad \dots(5\text{分})
 \end{aligned}$$

其中 $C \in \mathbb{R}$ 为任意常数. 故在上半平面, 对 $z = x + iy, y > 0$, 解析函数

$$f(z) = u + iv = \arctan \frac{x}{y} + 2xy + C + i \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x^2 + y^2 \right)$$

或

$$\begin{aligned}
 &= -\arctan \frac{y}{x} + 2xy + C + i \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x^2 + y^2 \right) \\
 &= i \left(\ln |z| + i \arg z + iz^2 \right) + C = i \ln z - iz^2 + C \quad \dots(2\text{分})
 \end{aligned}$$

方法三: 记 $z = x + iy$, 由 Cauchy-Riemann 方程,

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y + iv_x = \frac{y}{x^2 + y^2} + 2y + i \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - 2x \right) \quad \dots(5\text{分})$$

$$= \frac{i(x - iy)}{x^2 + y^2} - 2i(x + iy) = \frac{i\bar{z}}{z\bar{z}} - 2iz = \frac{1}{z} - 2iz. \quad \dots(2\text{分})$$

故

$$f(z) = \int f'(z) dz = i \ln z - iz^2 + C,$$

其中 $C \in \mathbb{R}$ 为任意常数. ...(3分)

方法四: 记 $z = x + iy$, 则

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

$$v = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x^2 + y^2 = \ln |z| - \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 = \ln |z| - \frac{z^2 + \bar{z}^2}{2} \quad \dots(5\text{分})$$

由 $f(z) = u + iv$,

$$f(z) + \overline{f(z)} = 2iv = 2i \ln |z| - i(z^2 + \bar{z}^2) = i \left(\ln z + iC + \overline{\ln z + iC} \right) - i(z^2 + \bar{z}^2),$$

故

$$f(z) = i \ln z - iz^2 + C,$$

其中 $C \in \mathbb{R}$ 为任意常数. ...(5分)

4. (10分) 记 $g(z) = 1 - e^{-z}$, 令 $g(z) = 0$ 得 $z = 2k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 由于 $g'(z) = e^{-z} \neq 0$, 故它们是 $g(z)$ 的一阶零点. 又它们都不是分子 e^z 的零点, 而其中的 0 是 z 的一阶零点, ... (4分)

故 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的二阶极点, $z = 2k\pi i$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 是 $f(z)$ 的一阶极点, 进而 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的非孤立奇点. ... (6分)

5. (20分) (1) 易知 $f(z) = \frac{\cos z}{z^3(z-1)}$ 的奇点有 $z = 0$ (三阶极点) 和 $z = 1$ (一阶极点). ... (2分)

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\cos z}{z^3} = \cos 1. \quad \dots (2分)$$

$$\operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{2!} \left(z^3 f(z) \right)'' \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos z}{z-1} \right)'' \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos z}{z-1} + \frac{2 \sin z}{(z-1)^2} + \frac{2 \cos z}{(z-1)^3} \right) \Big|_{z=0} = -\frac{1}{2},$$

或由

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\cos z}{z^3(z-1)} = \frac{-1}{z^3} (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) \\ &= -\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} - \frac{1}{2} - \dots \end{aligned}$$

得 $\operatorname{Res} f(z) = -\frac{1}{2}$ (2分)

所以由留数定理,

$$\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3(z-1)} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res} f(z) + \operatorname{Res} f(z) \right) = 2\pi i \left(\cos 1 - \frac{1}{2} \right). \quad \dots (4分)$$

(2) 易知 $f(z) = \frac{ze^{iz}}{1+z^2}$ 的奇点有 $z = \pm i$ (一阶极点), 其中 $z = i$ 在上半平面, ... (2分)

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{ze^{iz}}{z+i} = \frac{e^{-1}}{2}. \quad \dots (2分)$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{1+x^2} dx = \operatorname{Im} \{ 2\pi i \operatorname{Res} f(z) \} = \operatorname{Im} \{ \pi i e^{-1} \} = \pi e^{-1}. \quad \dots (6分)$$

6. (10分) 证明: 当 $g(z)$ 恒为 0 时结论显然成立, 故不妨假设 $g(z)$ 不恒为 0. ... (1分)

作 $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ ($z \in \mathbb{C}$). ... (2分)

由唯一性定理, $g(z)$ 的零点在复平面内无聚点, 因此 $h(z)$ 是复平面内的亚纯函数. ... (1分)

假设 $h(z)$ 在复平面内有极点 a , 则 $\lim_{z \rightarrow a} h(z) = \infty$, 从而存在 $b \in \mathbb{C}$ 使得 $g(b) \neq 0$ 且 $|h(b)| > 1$. 而此时有 $|f(b)| > |g(b)|$, 矛盾. 故 $h(z)$ 是整函数, 且 $|h(z)| \leq 1$ ($z \in \mathbb{C}$). ... (4分)

由刘维尔定理, $h(z) \equiv c$, 即证. ... (2分)

7. (10分) 证明: 给定 $z_0 \in K$, 令 $w_0 = f(z_0)$, 并作分式线性变换

$$\varphi(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}, \quad \psi(w) = \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0}w},$$

则 $\varphi(z)$ 和 $\psi(w)$ 均将 K 映成 K 自身. ... (2分)

再作

$$g(\lambda) = \psi(f(\varphi^{-1}(\lambda))) \quad (\lambda \in K),$$

则 $g: K \rightarrow K$ 是解析函数, 且 $g(0) = 0$ (2分)

由施瓦兹引理, 有 $|g'(0)| \leq 1$ (2分)

因为 $f(z) = \psi^{-1}(g(\varphi(z)))$, 所以

$$|f'(z_0)| = |(\psi^{-1})'(g(\varphi(z_0))) \cdot g'(\varphi(z_0)) \cdot \varphi'(z_0)| = |(\psi^{-1})'(0)| |g'(0)| |\varphi'(z_0)| \leq \frac{|\varphi'(z_0)|}{|\psi'(w_0)|} = \frac{1 - |w_0|^2}{1 - |z_0|^2}.$$

证毕. ... (4分)

8. (10分) 证明: 由魏尔斯特拉斯定理, $f(z)$ 在 D 内解析, 且 $\{f'_n(z)\}_{n \geq 1}$ 内闭一致收敛于 $f'(z)$ (2分)

现假设存在 $z_0 \in D$ 使得 $f'(z_0) = 0$. 因为 $f(z)$ 非常值, 所以 $f'(z)$ 不恒为零, 从而 z_0 是 $f'(z)$ 的孤立零点. ... (1分)

取 $\varepsilon > 0$, 使得 $|z - z_0| \leq \varepsilon$ 包含在 D 内, 且 $f'(z)$ 在 $0 < |z - z_0| \leq \varepsilon$ 上无零点. ... (2分)

令 $\delta = \min_{|z - z_0| = \varepsilon} |f'(z)|$, 则 $\delta > 0$. 因为 $\{f'_n(z)\}_{n \geq 1}$ 在 $|z - z_0| = \varepsilon$ 上一致收敛于 $f'(z)$, 所以存在足够大的正整数 N , 使得

$$|f'_N(z) - f'(z)| < \delta \leq |f'(z)| \quad (|z - z_0| = \varepsilon). \quad \dots (3分)$$

由儒歇定理, $f'_N(z)$ 和 $f'(z)$ 在 $|z - z_0| < \varepsilon$ 有相同的零点个数, 矛盾. 故假设不成立, 证毕. ... (2分)

9. (10分) 结论: 是. ... (2分)

证明: 记 $g(w) = \sin w$, $h(z) = g(f(z))$, $A = \{w : g'(w) = \cos w = 0\}$, $B = f^{-1}(A)$.

当 $h(z)$ 是常值函数时, 由题设可知 $f(z)$ 也是常值函数, 故不妨假设 $h(z)$ 非常值. ... (2分)

首先证明 B 在 D 中无聚点. 假若不然, 则存在 B 中的点列 $\{z_n\}$ 收敛至 D 中的点 a . 因为 $\cos f(z_n) = 0$, 所以 $h(z_n) = \sin f(z_n) = \pm 1$, 从而 $h(z) + 1$ 或 $h(z) - 1$ 中至少有一个的零点以 a 为聚点. 但根据唯一性定理, 这与 $h(z)$ 非常值的假设矛盾. ... (2分)

然后证明 $f(z)$ 在 $D \setminus B$ 内解析. 给定 $z_0 \in D \setminus B$, 令 $w_0 = f(z_0)$. 由于 $g'(w_0) \neq 0$, 存在 w_0 的邻域 U 使得 $g(w)$ 在 U 内单叶. 再由 $f(z)$ 的连续性, 可取 z_0 的邻域 V 使得 $V \subset D$ 和 $f(V) \subset U$, 从而 $h(V) = g(f(V)) \subset g(U)$. 注意到 $g^{-1}(\lambda)$ 是区域 $g(U)$ 上的解析函数, 因此 $f(z) = g^{-1}(h(z))$ ($z \in V$) 也是解析的. 特别地, $f(z)$ 在 z_0 处解析. ... (2分)

最后因为 B 在 D 中无聚点, 且 $f(z)$ 在 $D \setminus B$ 内解析, 所以 B 中的点都是 $f(z)$ 的孤立奇点. 而 $f(z)$ 在 D 内连续, 故 B 中的点都是 $f(z)$ 的解析点. 证毕. ... (2分)