

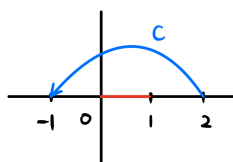
## 复变函数 2024B 参考答案

1. (15 分) 由

$$f(z) = \sqrt{z(1-z)} = \sqrt{|z(1-z)|} e^{i \frac{\arg z(1-z) + 2k\pi}{2}}, \quad k = 0, 1.$$

知它的支点为 0 和 1. 于是可以取割线  $[0, 1]$ , 在  $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$  上, 可以将  $f$  分出两个单值解析分支.  
...(6 分)

由  $f(2) = \sqrt{2}i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ , 故在该分支上, 按下图取路径  $C$ , 可得



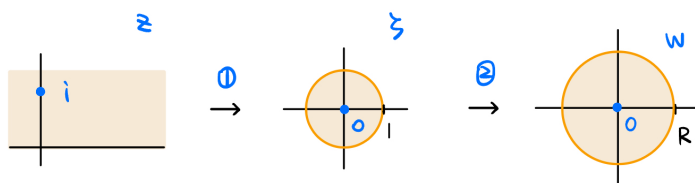
$$f(-1) = \sqrt{2}e^{i(\arg f(2) + \Delta_C \arg f(z))} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi + \pi}{2})} = -\sqrt{2}i.$$

...(9 分)

2. (15 分) 将上半平面  $\text{Im} z > 0$  映成单位圆  $|\zeta| < 1$  的分式线性变换为  $\zeta = e^{i\theta} \frac{z-a}{z-\bar{a}}$ , 将单位圆  $|\zeta| < 1$  映成圆  $|w| < R$  的分式线性变换不妨取为  $w = R\zeta$ . 故所求分式线性变换为

$$w = f(z) = Re^{i\theta} \frac{z-a}{z-\bar{a}}.$$

...(9 分)



由  $f(i) = 0$  知  $a = i$ ,  $w = f(z) = Re^{i\theta} \frac{z-i}{z+i}$ . 又  $f'(i) = Re^{i\theta} \frac{1}{2i} = 1$ , 故  $R = 2$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . 因此

$$w = f(z) = 2i \frac{z-i}{z+i}.$$

...(6 分)

3. (20 分) (1) 由高阶导数公式,

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)} dz = 2\pi i \left( \frac{e^z}{z^2-9} \right)' \Big|_{z=0} = -\frac{2}{9}\pi i.$$

...(10 分)

(2) 由 Laurent 展开式

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \cdots,$$

知  $\operatorname{Res}_{z=0} \sin \frac{1}{z} = 1$ . 故由留数定理,

$$\int_{|z|=1} \sin \frac{1}{z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \sin \frac{1}{z} = 2\pi i.$$

...(10 分)

4. (10 分) (1)  $a > 5$ . 记  $f(z) = az^4 - 3z + 2$ ,  $g(z) = az^4$ . 在  $C: |z| = 1$  上,

$$|f - g| \leq 3|z| + 2 = 5 < a = |g|.$$

由 Rouché 定理,  $N(f, C) = N(g, C) = 4$ . 即  $az^4 - 3z + 2 = 0$  在  $|z| < 1$  内有 4 个根. ... (5 分)

(2)  $a = 5$ ,  $f(z) = 5z^4 - 3z + 2$ . 记  $\delta = \min_{z \in C} |f(z)|$ , 易知  $\delta > 0$ . 这是因为在  $C: |z| = 1$  上,

$$|f(z)| = |5z^4 - 3z + 2| \geq |5z^4| - |3z - 2| = 5 - |3z - 2| \geq 5 - (3|z| + 2) = 0,$$

若  $|f(z)| = 0$ , 则  $|3z - 2| = 5$ , 即  $z = -1$ . 而  $|f(-1)| = 10 > 0$ , 矛盾. 因此  $\delta > 0$ .

记  $h(z) = f(z) + \frac{\delta}{3}z^4 = (5 + \frac{\delta}{3})z^4 - 3z + 2$ . 由 (1) 知  $N(h, C) = 4$ . 又注意到在  $C: |z| = 1$  上,

$$|h| \geq |f| - |\frac{\delta}{3}z^4| \geq \delta - \frac{\delta}{3} = \frac{2\delta}{3} > \frac{\delta}{3} = |\frac{\delta}{3}z^4|,$$

故由 Rouché 定理,  $N(f, C) = N(h, C) = 4$ . 即  $5z^4 - 3z + 2 = 0$  在  $|z| < 1$  内有 4 个根. ... (5 分)

5. (10 分) 结论:  $f(z)$  在复平面中的零点个数比极点个数多 1. ... (2 分)

解答: 由题设可知存在足够大的  $R > 0$ , 使得  $f(z)$  在区域  $|z| > R$  内无零点, 且  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ , 即  $\infty$  是  $f(z)$  在扩充复平面上的极点. ... (3 分)

因此  $f(z)$  是有理函数. ... (2 分)

设  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , 其中  $P(z)$  和  $Q(z)$  是互素的多项式. 由  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{zQ(z)} = 1$  可知  $P(z)$  的次数比  $Q(z)$  多 1. 因此  $f(z)$  在复平面中的零点个数比极点个数多 1. ... (3 分)

6. (10 分) 结论: 一阶极点. ... (2 分)

证明: 若  $a$  是  $f(z)$  的可去奇点, 则补充定义  $f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$  后,  $f(z)$  在  $a$  处解析, 从而在闭圆盘  $|z - a| \leq r$  上连续. 而这与  $f(z)$  在  $0 < |z - a| < r$  内无界矛盾. ... (2 分)

若  $a$  是  $f(z)$  的本性奇点, 则对  $0 < |z - a| < r$  中任意的  $b$ , 由皮卡定理, 存在  $0 < |z - a| < r$  中趋于点  $a$  的点列  $\{z_n\}$  使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(b)$ . 分别取  $a$  和  $b$  在  $0 < |z - a| < r$  中的邻域  $U$  和  $V$ , 使得  $U \cap V = \emptyset$ . 再由保域定理和  $f(z)$  的单叶性,  $f(U)$  是与  $f(V)$  不相交的开集, 因此

$$f(b) \in \overline{f(V)} \subseteq \mathbb{C} \setminus f(U),$$

矛盾. 由此可知  $a$  是  $f(z)$  的极点. ... (4 分)

设  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ . 则  $\varphi(z)$  在  $a$  的某个邻域内单叶解析, 且  $\varphi(a) = 0$ . 由  $\varphi(z)$  的单叶性, 有  $\varphi'(a) \neq 0$ , 即  $a$  是  $\varphi(z)$  的一阶零点. 故  $a$  是  $f(z)$  的一阶极点. ... (2 分)

7. (10 分) 结论: 是. ... (2 分)

证明: 假若不然,  $f(z)$  在点  $a$  和  $b$  处有相同的值, 记为  $c$ . ... (1 分)

分别取  $a$  和  $b$  在  $D$  中的邻域  $U$  和  $V$ , 使得  $U \cap V = \emptyset$ . ... (2 分)

由保域定理,  $f(U)$  和  $f(V)$  均为包含点  $c$  的区域, 因此存在  $c$  的邻域  $W$ , 使得  $W \subseteq f(U) \cap f(V)$ . ... (3 分)

任取  $w \in W \setminus \{c\}$ , 则存在  $u \in U$  和  $v \in V$ , 使得  $f(u) = f(v) = w$ . 显然  $u \neq a$ , 这与  $f(z)$  在  $D \setminus \{a\}$  内的单叶性矛盾, 故假设不成立. 证毕. ... (2 分)

8. (10 分) 证明: 设  $z_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) 为  $f(z)$  在  $|z| \leq \frac{1}{3}$  中的全部零点. 则函数

$$g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{z}{z_j}\right)}$$

在  $|z| \leq 1$  上解析. ... (2 分)

而在  $|z| = 1$  上  $|z_j| \leq \frac{1}{3} \leq \frac{|z|}{3}$ , 即  $\left|\frac{z}{z_j}\right| \geq 3$ . 故

$$|g(z)| \leq \frac{|f(z)|}{\prod_{j=1}^n \left|1 - \frac{z}{z_j}\right|} \leq \frac{M}{2^n} \quad (|z| = 1). \quad \dots (3 \text{分})$$

由最大模原理,

$$|f(0)| = |g(0)| \leq \frac{M}{2^n}. \quad \dots (3 \text{分})$$

因此,  $n \leq \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{M}{|f(0)|}$ . 即证. ... (2 分)