

四川大学期末考试试题 A 卷参考答案
(复变函数 2024——2025 学年第 2 学期)

第 1 题解答: $w = \sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{2}}, k = 0, 1$, 其中 $0 \leq \arg z < 2\pi$.

$$w(-1) = e^{i \frac{\pi + 2k\pi}{2}} = -i = e^{i \frac{\pi + 2\pi}{2}} \Rightarrow k = 1. w(2i) = \sqrt{2} e^{i \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{2}} = -\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} = -1 - i. \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{由 } w'(z) = \frac{(\sqrt{z})_k}{2z} (\text{或} = \frac{1}{2(\sqrt{z})_k}), \text{ 知 } w'(2i) = \frac{w(2i)}{2 \cdot 2i} = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{i \frac{3}{4}\pi} = \frac{i-1}{4}. \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

第 2 题解答: (1) $u = ax^2 + 2bxy + cy^2, u_x = 2ax + 2by, u_y = 2bx + 2cy,$

$$u_{xx} = 2a, u_{yy} = 2c, \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow a = -c. \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

(2) $u = a(x^2 - y^2) + 2bxy$ 为调和函数 .

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x + i v_x = u_x - i u_y = 2ax + 2by - i(-2ay + 2bx) = 2a(x + iy) - i2b(x + iy) \\ &= 2az - i2bz = 2(a - ib)z. \end{aligned}$$

$$f(z) = \int f'(z) dz = (a - ib)z^2 + iC_0, C_0 \in R.$$

$$\text{故 } f(z) = (a - ib)(x^2 - y^2 + i2xy) + iC_0 = a(x^2 - y^2) + 2bxy + i[2axy - b(x^2 - y^2) + C_0].$$

所以 $v = 2axy - bx^2 + by^2 + C_0, C_0 \in R. \dots\dots\dots 6 \text{分}$

$$\text{第 3 题解答: } f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z^2 + 1}{(z-1)(z-2)} = (z^2 + 1)\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}\right), 1 < |z| < 2.$$

$$\begin{aligned}
\text{从而 } f(z) &= (z^2 + 1) \left(\frac{-\frac{1}{2}}{1 - \frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \right) = (z^2 + 1) \left(\frac{-\frac{1}{2}}{1 - \frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \right) \cdots \cdots \cdots 2\text{分} \\
&= (z^2 + 1) \left(-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^n \right) \cdots \cdots \cdots 7\text{分} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} z^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n-1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-1}{2^{n-1}} + \frac{-1}{2^{n+1}} \right) z^n - z - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{z^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{z^n} - \frac{3}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{2^{n+1}} z^n. \cdots \cdots \cdots 1\text{分}
\end{aligned}$$

第 4 题解答: (1) $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z(z-a)} dz = \begin{cases} 2\pi i \frac{1}{z-a} \Big|_{z=0} = -\frac{2\pi i}{a}, & |a| > 1; \cdots \cdots \cdots 5\text{分} \\ 2\pi i \left(\frac{1}{z-a} \Big|_{z=0} + \frac{1}{z} \Big|_{z=a} \right) = 0, & |a| < 1. \cdots \cdots \cdots 5\text{分} \end{cases}$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{z}{1+z^2} e^{i\alpha z} = 2\pi i \frac{ie^{-\alpha}}{2i} = \pi e^{-\alpha}. \cdots \cdots \cdots 5\text{分}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \sin(\alpha x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \sin(\alpha x) dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} e^{i\alpha x} dx \right) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}.$$

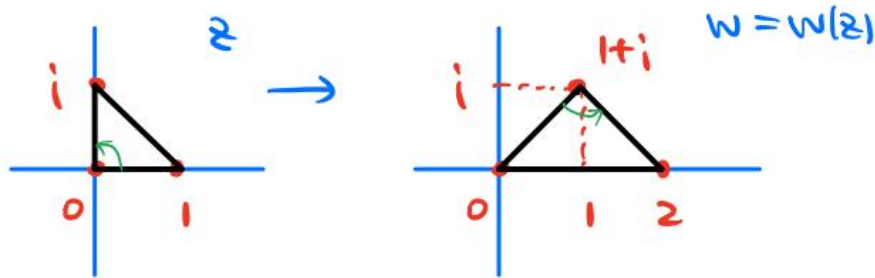
$\cdots \cdots \cdots 5\text{分}$

第 5 题解答:

记 $\Gamma = D \cap R$, 由于 $f(z) = g(z), \forall z \in \Gamma$, 利用惟一性定理, 可得 $f(z) = g(z), \forall z \in D$.

$\cdots \cdots \cdots 10\text{分}$

第 6 题解答:



由分式线性变换的保角性知, $w(0) = 1+i$, $w(1) = 0$, $w(i) = 2$ 3分

故由保交比性知: $(0, 1, i, z) = (1+i, 0, 2, w)$.

即 $\frac{z}{z-1} : \frac{i}{i-1} = \frac{w-1-i}{w} : \frac{2-1-i}{2}$ 4分

所以 $w = -(1+i)z + 1+i = (1+i)(1-z)$ 3分

第7题解答:

由 $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$, $\forall z \in K$ 知 $\sup_{|z|=R} |f(z)| \leq \frac{1}{1-R}$ 2分

因此, 由 Cauchy 不等式, $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{R^n} \sup_{|z|=R} |f(z)| \leq \frac{n!}{R^n(1-R)}$, $\forall R \in (0, 1)$ 5分

记 $g(R) = R^n(1-R) = R^n - R^{n+1}$,

$$g'(R) = nR^{n-1} - (n+1)R^n = R^{n-1}(n - (n+1)R) = 0 \Rightarrow R = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

$$\Rightarrow g_{\max} = g\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}. \quad \text{.....1分}$$

于是 $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}} = (n+1)! \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < (n+1)!e$ 2分

第8题解答: 要证 $\forall 0 < \rho < 1, g(K_\rho) \subset f(K_\rho)$, 即证 $\forall w \in g(K_\rho), w \in f(K_\rho)$ 2分

也就是 $\forall z \in K_\rho, \exists \xi \in K_\rho, s.t. f(\xi) = w = g(z)$.

由于 $w \in g(K_\rho) \subset g(K) \subset f(K)$, 故 $\exists \xi \in K$. 下面证明 $\xi \in K_\rho$.

由于 f 在 K 上单叶解析, 故 f^{-1} 是 $f(K) \rightarrow K$ 的单叶解析函数.

记 $\xi(z) = f^{-1}(w) = f^{-1} \circ g(z)$, 则 ξ 是 $K \rightarrow K$ 的解析函数. 3分

又因为 $f(0) = g(0) = 0$, 故有 $\xi(0) = f^{-1} \circ g(0) = 0$.

于是利用 *Schwarz* 引理, $\forall z \in K, |\xi(z)| \leq |z|$.

因此, $\forall z \in K_\rho, |\xi(z)| \leq |z| < \rho, \xi \in K_\rho$ 5分

第9题解答:

方法一:

(1) 由 *Weierstrass* 定理, f 在 D 内解析. 2分

记 $\delta = \min_{z \in C} f(z) > 0$. 由于 f_n 在 D 内闭一致收敛于 f , 故 $\exists N > 0, s.t.$ 对于 $\forall n > N$,

$|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|, \forall z \in C$. 利用 *Rouche* 定理, 有 $N(f, C) = N(f_n, C)$ 4分

(2) 要证 $Z \subset \overline{\bigcup_{n \geq 1} Z_n}$, 即证 $\forall a \notin \overline{\bigcup_{n \geq 1} Z_n}$, 则 $a \notin Z$.

由 $a \notin \overline{\bigcup_{n \geq 1} Z_n}$ 知 $\exists \rho > 0, s.t. N_\rho(a)$ 中不含 $f_n (n = 1, 2, \dots)$ 的零点.

又 f 在 $N_\rho(a)$ 解析, 故 f 在 $N_\rho(a)$ 内的零点至多有有限多个.

因此, $\exists 0 < \rho_0 < \rho, s.t. f$ 在 $\gamma: |z - a| = \rho_0$ 上没有零点.

故由 (1) 知, $N(f, \gamma) = N(f_n, \gamma) = 0$, 从而有 $a \notin Z$ 4分

方法二: 利用 *Hurwitz* 定理: 设 C 为区域 D 内的周线, 且 C 不过 f 的零点, 则

$\exists N, \forall n > N, s.t. N(f_n, C) = N(f, C)$. *Hurwitz* 定理的证明见方法一的第一部分 (1).