

四川大学期末考试试题 (闭卷)

(2024 – 2025 学年第 2 学期) B卷

课程号: 201015040 课序号: 01-03 课程名称: 复变函数 任课教师: 张志雄 王艳艳 但晖 成绩:
适用专业年级: 数学2023级 学生人数: 272 印题份数: 学号: 姓名:

考生承诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

- 1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；
- 2、不带手机进入考场；
- 3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

1. (10分) 设 $w = \text{Ln } z$ 确定在从原点起沿负实轴割破了的 z 平面上, 并且 $w(1) = 2\pi i$, 求 $w(i)$.

2. (10分) 若 $f(z) = e^x(x \cos y + ay \sin y) + ie^x(bx \sin y + cy \cos y)$ 在 z 平面上解析, 试确定实数 a, b, c 的取值.

3. (10分) 求函数 $f(z) = \frac{2z^2 + 13z + 20}{(z + 3)^2(z + 2)}$ 在 $|z| < 2$ 内的幂级数中一次项 $c_1 z$ 的系数 c_1 .

4. (10分) 计算积分 $\int_{|z|=2} \frac{5z + 1}{(z - 1)(z + 1)^2} dz$.

5. (15分) 设区域 $D = \{z : |z| < \rho, 0 < \arg z < 2\pi/3\}$, 其中 $\rho > 0$. 设 C 为 D 的边界, 方向取逆时针方向. 试通过计算积分 $\int_C \frac{z^3}{z^6 + 1} dz$ 求实积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{x^6 + 1} dx$.

6. (10分) 设 $f(z)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的单叶整函数, 证明: 存在 $a, b \in \mathbb{C}$, 使得 $f(z) = az + b$.

7. (10分) 求将区域 $G = \{z : |\text{Re } z| < 1\}$ 映到单位圆盘 $K = \{w : |w| < 1\}$ 的共形映射 $w = f(z)$, 使得 $f(0) = 0, f'(0) > 0$.

8. (10分) 设 $f(z)$ 在单位圆盘 $K = \{z : |z| < 1\}$ 内解析函数, 且 $|\text{Re } f(z)| < 1 (z \in K)$, $f(0) = 0$. 证明: $|f'(0)| \leq 4/\pi$.

9. (15分) 设 $f_n(z)$ 是区域 D 内的解析函数序列, 且 $\text{Re } f_n(z) > 0 (z \in D; n = 1, 2, \dots)$. 若 $\{f_n(z)\}$ 不内闭一致发散到 ∞ , 证明: $\{f_n(z)\}$ 存在子列在 D 内内闭一致收敛.

提示: (1) 取一个将 $G = \{w : \text{Re } w > 0\}$ 映成 $K = \{\xi : |\xi| < 1\}$ 的分式线性变换 $\xi = h(w)$; (2) 证明 $\{g_n(z) = h(f_n(z))\}$ 在 D 内有内闭一致收敛的子列 $\{g_{n_k}(z)\}$, 且该子列的极限 $g(z)$ 的值域不含 $w = h^{-1}(\xi)$ 的奇点; (3) 基于以上步骤构造 $\{f_n(z)\}$ 的内闭一致收敛子列.